

## 5) المستقيم في المستوى

(a) ليكن  $(D)$  مستقيم و  $\vec{n}$  متجهة. نقول إن المتجهة  $\vec{n}$  منظمية على  $(D)$  إذا كان حامل  $\vec{n}$  عمودي على  $(D)$  (يعني  $\vec{n} \perp (D)$ ).

(b) نعتبر المستقيم:  $(D): ax+by+c=0$

لدينا  $\vec{u}(-b, a)$  موجهة ل  $(D)$  و  $\vec{n}(a, b)$  منظمية على  $(D)$ .

(c) معادلة مستقيم معرف بنقطة و متجهة منظمية عليه.

مثال: حدد المعادلة ديكرتية للمستقيم  $(D)$  المار من  $A(1,2)$  والمتجهة  $\vec{n}(-3,4)$  منظمية عليه.

## طريقة 1.

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-1) + 4(y-2) = 0$$

$$(D): -3x + 4y - 5 = 0 \quad \text{إن}$$

طريقة 2. لدينا  $\vec{n}(-3,4)$  منظمية على  $(D)$  إذن معادلة  $(D)$  على شكل

$(D): -3x + 4y - 5 = 0$  ولدينا  $A(1,2)$  إذن  $-3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + c = 0$  يعني  $c = -5$  إذن  $(D): -3x + 4y - 5 = 0$

(d) ليكن  $(D)$  مستقيم مار من  $A$  و  $\vec{n}$  منظمية عليه.

و  $(D')$  مستقيم مار من  $A'$  و  $\vec{n}'$  منظمية عليه.

(\* يكون  $(D) \perp (D')$  إذا وفقط إذا كان  $\vec{n} \perp \vec{n}'$  يعني  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

(\* يكون  $(D) \parallel (D')$  إذا وفقط إذا كان  $\vec{n} \parallel \vec{n}'$  يعني  $\det(\vec{n}, \vec{n}') = 0$

(e) نعتبر المستقيمين:  $(D): ax + by + c = 0$  و  $(D'): a'x + b'y + c' = 0$

(\* يكون  $(D) \perp (D')$  إذا وفقط إذا كان  $aa' + bb' = 0$

(\* يكون  $(D) \parallel (D')$  إذا وفقط إذا كان  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

## f) مسافة نقطة عن مستقيم.

(i) ليكن  $(D)$  مستقيم و  $A$  نقطة من المستوى.

نسمي مسافة  $A$  عن  $(D)$  العدد الذي نرمز له ب  $d(A, (D))$  والمعروف

بما يلي  $d(A, (D)) = AH$  حيث  $H$  هي المسقط العمودي ل  $A$  على  $(D)$ .

(ii) نعتبر المستقيم  $(D): ax + by + c = 0$  والنقطة  $A(x_0, y_0)$

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{لدينا}$$

ملاحظة: مسافة النقطة  $A$  عن المستقيم  $(D)$  هي أصغر مسافة

بين  $A$  ونقط المستقيم  $(D)$ .

(g) واسط القطعة  $[AB]$  هو المستقيم المار من  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $\overline{AB}$  منظمية عليه.

(h) (\* مركز ثقل المثلث  $(ABC)$  هو تقاطع المتوسطات.

(\* مركز تعامد المثلث  $(ABC)$  هو تقاطع الارتفاعات.

(\* مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $(ABC)$  هو تقاطع الواسطات.

(\* مركز الدائرة المحاطة بالمثلث  $(ABC)$  هو تقاطع المنصفات.

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

## I) تحليلية الجداء السلمي

1) نعتبر المتجهتين  $\vec{u}(x; y)$  و  $\vec{v}(x'; y')$

لدينا  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  و  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) نعتبر النقطتين  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$

لدينا  $\overline{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$  و  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad 3$$

$$4$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad (a)$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad (b)$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AC}\|} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \cdot AC} \quad (c)$$

$$\sin(\widehat{BAC}) = \left| \sin(\overline{AB}, \overline{AC}) \right| = \left| \frac{\det(\overline{AB}, \overline{AC})}{AB \cdot AC} \right| \quad (d)$$

## ملاحظة:

(a) إذا أردنا تحديد قياسا للزاوية الهندسية  $\widehat{BAC}$  يكفي حساب  $\cos(\widehat{BAC})$

نجد مثلا:  $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{2}$

يعني  $\cos(\widehat{BAC}) = \cos \frac{2\pi}{3}$

إذن  $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

(b) إذا أردنا تحديد قياس الزاوية الموجهة  $(\overline{AB}, \overline{AC})$  نقوم بحساب

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) \quad \text{و} \quad \sin(\overline{AB}, \overline{AC})$$

نجد مثلا:  $\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$  و  $\sin(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

ومن أجل تحديد قياس الزاوية نتبع ما يلي:

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \cos \frac{3\pi}{4} \quad \text{يعني} \quad \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{يعني} \quad (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$$

ولدينا  $\sin(\overline{AB}, \overline{AC}) < 0$

$$\text{إذن} \quad (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{يعني} \quad (\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$$

## (II) دراسة تحليلية للدائرة.

1) الدائرة التي مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $r$  هي مجموعة  $M$  التي تحقق  $\Omega M = r$ .

2) معادلة الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(a,b)$  وشعاعها  $r$  هي  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  شكل  $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ .

3) نعتبر المجموعة (Γ) التي معادلتها  $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$  (Γ): من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان:

ط1: نضع  $a = -\frac{\alpha}{2}$   $b = -\frac{\beta}{2}$   $c = \gamma$  ونقوم بحساب  $a^2 + b^2 - c$

(\* إذا كان  $a^2 + b^2 - c < 0$  فإن  $\Gamma = \emptyset$

(\* إذا كان  $a^2 + b^2 - c = 0$  فإن  $\Gamma = \{\Omega(a,b)\}$

(\* إذا كان  $a^2 + b^2 - c > 0$  فإن (Γ) دائرة مركزها  $\Omega(a,b)$  وشعاعها  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

ط2: نقوم بتحويل المعادلة لنعرجها على شكل  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$

باستعمال بداية متطابقة هامة  $X^2 + \alpha X = \left(X + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ .

(\* إذا كان  $k < 0$  فإن  $\Gamma = \emptyset$ .

(\* إذا كان  $k = 0$  فإن  $\Gamma = \{\Omega(a,b)\}$ .

(\* إذا كان  $k > 0$  فإن (Γ) دائرة مركزها  $\Omega(a,b)$  وشعاعها  $r = \sqrt{k}$ .

4) معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن (ℓ) دائرة أحد أقطارها [AB] للحصول على معادلة (ℓ) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة:  $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

$M(x,y) \in (\ell) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

ط2: نتبع ما يلي:  $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B \end{pmatrix} = 0$

ملاحظة: إذا كان (ABC) قائم الزاوية في A فإن الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هي الدائرة التي قطرها [BC]. مركزها هو منتصف [BC] شعاعها هو  $\frac{BC}{2}$ .

5) تمثيل باراميتري للدائرة.

تمثيل باراميتري للدائرة (ℓ) التي مركزها  $\Omega(a,b)$  وشعاعها  $r$  هو

(C):  $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$ .

6) داخل خارج دائرة:

لتكن (C) دائرة مركزها  $\Omega(a,b)$  وشعاعها  $r$  معادلتها

$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + c = 0$  ونعتبر النقطة  $M(\alpha, \beta)$ .

(\* تكون M خارج الدائرة (ℓ) إذا فقط إذا كان:

$\Omega M > 0$  أو  $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c > 0$

(\* تكون M داخل الدائرة (ℓ) إذا فقط إذا كان:

$\Omega M < 0$  أو  $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c < 0$ .

(\*  $M \in (C)$  إذا فقط إذا كان  $\Omega M = r$  أو

$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c = 0$ .

## 7) تقاطع مستقيم ودائرة.

لتكن (C) دائرة مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $r$  ومعادلتها

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

ونعتبر المستقيم  $\Delta: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ .

من أجل دراسة تقاطع (C) و (Δ) نقوم بحساب  $d(\Omega, (\Delta))$ .

(a) إذا كانت  $d(\Omega, (\Delta)) > r$  فإن (Δ) يوجد خارج (C) وبالتالي لا يقطع (C).

(b) إذا كانت  $d(\Omega, (\Delta)) = r$  فإن (Δ) يقطع (C) في نقطة واحدة A ونقول في هذه الحالة إن (Δ) مماس ل (C) في النقطة A و A تسمى نقطة التماس.

وللحصول على نقطة التماس نقوم بحل

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \text{النظمة}$$

(c) إذا كانت  $d(\Omega, (\Delta)) < r$  فإن (Δ) يقطع (C) في نقطتين A و B، وللحصول على إحداثيات النقطتين A و B نقوم بحل

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \text{النظمة}$$

8) معادلة مماس لدائرة.

لتكن (C) دائرة مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $r$  ومعادلتها  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  وليكن (T) المماس ل (C) في النقطة  $A(x_0, y_0)$ .

للحصول على معادلة (T) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة  $x_0 x + y_0 y + \frac{a}{2}(x_0 + x) + \frac{b}{2}(y_0 + y) + c = 0$  (T):

ط2: هو المستقيم المار من  $\Omega$  والمتجه  $\overline{\Omega A}$  منظمية عليه.

ملاحظة: يكون (T) مماسا ل (C) في A إذا فقط إذا كان (T) عموديا على (ΩA) في A.

