I) النهايات :

1.I) نهايات الدوال المرجعية :

✷ تذكير :

الدالة	مجموعة التعريف	النهاية عند 0	النهاية عند $+\infty$	النهاية عند $-\infty$
x	$]-\infty ; +\infty[$	0	$+\infty$	$-\infty$
x^2	$]-\infty ; +\infty[$	0	$+\infty$	$+\infty$
x^3	$]-\infty ; +\infty[$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	0	0
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	0	$+\infty$	لايمكن
$\frac{\sin x}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	1	0	0
$\frac{1-\cos x}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	1/2	0	0

2.I) العمليات على النهايات :

✷ نهاية مجموع :

Lim f + g	Lim g	Lim f
l + l'	l'	l
$+\infty$	$+\infty$	l
$-\infty$	$-\infty$	l
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$

☜ أمثلة :

◆ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+3x-1\right) = +\infty$ ◆ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3-4x^2+\frac{1}{x}\right) = -\infty$ ◆ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{x}+x-4\right) = -4$

✷ نهاية جداء :

Lim f	Lim g	Lim f × g
l	l'	$l \times l'$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	شكل غير محدد

☜ أمثلة :

◆ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+3)\left(\frac{1}{x}-4\right) = -\infty$ ◆ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x} \times (x+5) =$ ش.غ

✷ نهاية خارج :

Limf	Lim g	Lim f / g
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$ أو $-\infty$	0
$+\infty$	$l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' < 0$	$+\infty$
$+\infty$ أو $-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$	ش.غ
$+\infty$ أو $l > 0$	0^+	$+\infty$
$+\infty$ أو $l > 0$	0^-	$-\infty$
$-\infty$ أو $l < 0$	0^+	$-\infty$
$-\infty$ أو $l < 0$	0^-	$+\infty$
∞	0	∞
0	0	ش.غ

☜ أمثلة :

◆ $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = 0$ ◆ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+5}{\frac{1}{x}-3} = -\infty$ ◆ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{2}{x}}{x^2-2} = +\infty$

ملحوظة :

- توجد دوال لاتقبل نهاية عند x_0 كالدالة $\frac{1}{x}$ ليس لها نهاية عند 0 .
- توجد دوال لا تقبل أية نهاية بجوار ∞ كدالة $\sin$.

✷ نهاية مركب دالتين :

خاصية 1 :

لتكن f و g دالتين , L' , L , a ثلاث أعداد حقيقية (قد تكون $+\infty$ أو $-\infty$)

إذا كانت $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \\ \lim\limits_{t\to L} g(t) = L' \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L'$

مثال : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{x})$

خاصية 2:

لتكن f و g و h ثلاث دوال . نفترض أنه من أجل قيم جد كبرى ل x لدينا $f(x) \le g(x) \le h(x)$

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

ملحوظة :

الخاصية تبقى صحيحة بجوار $-\infty$ أو x_0 شريطة تحقق المتفاوتة بالجوار.

مثال : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

<u>تمرين تطبيقي 1:</u>

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to1}(2x^3 - 3x^2 + x + 1)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3 - 3x^2 + x + 1)$ 3) $\lim\limits_{x\to1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3}$

4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{2x}{(1-x)^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ 6) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x+3}}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{2x + 1}$ 9) $\lim\limits_{x\to0} x^2.\sin\frac{1}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x}$ 13) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{3x}$ 14) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 7x}{\tan 5x}$

15) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 16) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1}$ 17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

II) الإ تصال :

تعريف :

f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 . f متصلة في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

☜ **أ مثلة :**

◆ $f(x) = x^2$

◆ $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 ; x \geq 0 \\ f(x) = x - 2 \quad ; \ x \langle 0 \end{cases}$

✍ تمرين تطبيقي 2:

أدرس آ تصال الدالة f في كل حالة عند x_0 .

1) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; \ x_0 = 0$

2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x} \cdot \sqrt{|x|} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} ; \ x_0 = 0$

3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1} \ ; x \in]1, +\infty[\\ f(x) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1} \ ; \ x \in]-\infty, 1[\\ f(1) = 2 \end{cases} ; \ x_0 = 1$

1.II) التمديد بالإ تصال :

تعريف :

f دالة غير معرفة في x_0 و تقبل نهاية L عند x_0 ($\lim_{x\to x_0} f(x) = L$) . الدالة g المعرفة ب:

$$\begin{cases} g(x) = f(x), x \neq x_0 / x \in D_f \\ g(x) = L \end{cases}$$

تسمى تمديد بالإ تصال للدالة f في x_0 .

☜ **مثال :** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \ ; \ x_0 = 0$

✍ تمرين تطبيقي 3:

أ درس التمديد بالإ تصال للدوال التالية عند x_0 .

1) $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{3x^2} \ ; \ x_0 = 0$, 2) $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1} \ ; \ x_0 = \dfrac{1}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{1+3x}{x^2+x} \ ; \ x_0 = 0$, 4) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x} \ ; \ x_0 = 0$, 5) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \ ; \ x_0 = 2$

II.2) الإتصال على مجال :

تعريف :

تكون الدالة f متصلة على $]a,b[$ إذاوفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a,b[$.

تكون f متصلة على $[a,b]$ إذا وفقط إذاكانت متصلة على $]a,b[$ و متصلة على يمين a و يسار b .

ملحوظة:

- الدالة متصلة على يمين a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- الدالة متصلة على يسار b $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

مثال : الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة على $]0;+\infty[$.

تمرين تطبيقي 4:

أدرس إتصال الدوال التالية على المجال I :

1) $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{5x - 4}$; $I = [1,+\infty[$

2) $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$; $I =]0,+\infty[$

3) $\begin{cases} f(x) = x - 1 \;;\; x \in [1,2] \\ f(x) = -2x + 7 \;;\; x]2,3] \end{cases}$; $I = [1,3]$

4) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \;;\; x \in [0,1] \\ f(x) = \frac{2x - 1}{x} \;;\; x \in]1,3] \end{cases}$; $I = [0,3]$

II.3) إتصال مركب دالتين :

خاصية 1:

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$ ليكن x_0 عنصر من I .

إذا كانت f متصلة في x_0 و كانت g متصلة في $f(x_0)$ فإن gof متصلة في x_0 .

مثال :

نعتبر الدالتين $g(x) = \sin x$ و $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ حدد الدالة fog

أدرس آتصال g في $\frac{\pi}{2}$ و آتصال f في $g(\frac{\pi}{2})$ ثم آتصال fog في $\frac{\pi}{2}$.

خاصية 2 :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$.

إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J فإن gof تكون متصلة على I .

☜ مثال :

نعتبر الدالة : $f(x)=\sin(x^2-1)$.

الدالة هي مركب الدالتين $g(x)=x^2-1$ و $h(x)=\sin x$ العرفتين على IR .

✋ ملحوظة :

الخاصية العكسية للخاصية السابقة غير صحيحة كما يبين المثال المضاد التالي :

نعتبر الدالتين : $\begin{cases} f(x)=3x+4 \ , (x\neq 0) \\ f(0)=6 \end{cases}$ و $g(x)=5 \ , x\in IR$

4.II) مركب دالة متصلة ودالة تقبل نهاية :

خاصية :

> f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$.
>
> إذا كانت f تقبل النهاية L في x_0 وكانت g متصلة في L فإن الدالة gof تقبل النهاية g(L) في x_0 .

✋ **ملحوظة:**

الخاصية تبقى صالحة عند ∞+ أو ∞- أو عند x_0 على اليمين أو اليسار مع تعويض المجال I بمجال مناسب .

☜ **مثال :**

أحسب : $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+3x+1}{x^2-1}\right)$

5.II) صورة مجال بدالة متصلة :

خاصية 1:

> صورة مجال من IR بدالة متصلة هو مجال من IR .

☜ **حالات مختلفة :**

لتكن f دالة متصلة على المجال I .

المجال I	الدالة f تزايدية قطعا على I	الدالةf تناقصية قطعا على I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a),\lim_{x\to b^-}f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-}f(x),f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim_{x\to a^+}f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim_{x\to a^+}f(x)[$
$]a,b[$	$]f(a),f(b)[$	$]f(b),f(a)[$

تمرين تطبيقي 5:

حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة :

1) $f(x) = x^2 - 1$; $I = [-3, -1]$, 2) $f(x) = x^2 - x + 1$; $I = [1, 7]$

3) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+7}$; $I =]0, +\infty[$, 4) $f(x) = \sqrt{1-3x}$; $I = \left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$

مبرهنة القيم الوسيطة:

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ فإن لكل عنصر α محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث $f(c) = \alpha$.

الشكل

مثال :

نعتبر الدالة $f(x) = x^3$. متصلة على المجال $[1,2]$ إذن لكل عنصر α بين $f(1)$ و $f(2)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[1,2]$ بحيث $f(c) = \alpha$.

خاصية 2 :

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و كانت $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ فإنه يوجد على الأقل عنصر c من $]a,b[$ بحيث $f(c) = 0$

خاصية 3 :

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و كانت $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ فإنه يوجد عنصر وحيد c من $]a,b[$ بحيث $f(c) = 0$

تمرين تطبيقي 6:

بين أن المعادلات التالية تقبل حلا وحيدا في المجال I :

1) $x^4 + 2x - 3 = 0$; $I = \left[\dfrac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$

2) $x^3 + 2 = 0$; $I = [-2; -1]$

3) $\sin x + \dfrac{1}{3} = 0$; $I = \left[-\dfrac{\pi}{6}; 0\right]$

III) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال

III.1) التقابل :

تعريف1 :

- f تقابل من I نحو J $\Leftrightarrow$ f شمولية و تباينية .
- f شمولية من I نحو J $\Leftrightarrow$ $\forall y \in J : \exists x \in I / f(x) = y$
- f تباينية $\Leftrightarrow$ $(f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y)$

خاصية :

كل دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فهي تقابل من I نحو $f(I)$

تعريف 2:

f تقابل من I نحو J $\Leftrightarrow$ $\forall y \in J : \exists! x \in I / f(x) = y$

2.III) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال من IR :

تعريف :

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإنها تقابل من I نحو $f(I)$ و تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $f(I)$ نحو I بحيث :

$$\forall x \in I, \forall y \in f(I) \ : \ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

خاصية :

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $f(I)$ ولها نفس منحى تغيرات f

ملحوظة :

- المنحنيان ζ_f و $\zeta_{f^{-1}}$ الممثلان ل f و f^{-1} متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم أي بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x$.
- نقبل أن f^{-1} متصلة على $f(I)$.
- لكل x من I : $f^{-1}of(x) = x$ و لكل y من $f(I)$: $fof^{-1}(y) = y$

3. III) أمثلة لبعض الدوال العكسية :

1.3. III) دالة الجذر من الرتبة n:

خاصية و تعريف :

الدالة x^n تقابل من $IR+$ إلى $IR+$ و تقابلها العكسي يسمى دالة الجذر من الرتبة n و يرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{x}$

ملحوظة :

- $\sqrt[n]{x}$ يقرأ جدر x من الرتبة n .

أمثلة :

$\sqrt[1]{x} = x$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجدر المكعب للعدد x .

نتائج :

$$\forall x \in IR+ \ , \ \forall y \in IR+$$

- $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$
- $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- $x = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$
- $x \langle y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} \langle \sqrt[n]{y}$
- الدالة $\sqrt[n]{x}$ متصلة على $IR+$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n.p]{x^p}$
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n.p]{x}$
- $\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x.y}$
- $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.

III.3.1) إتصال و نهاية مركب دالة f و دالة الجدر من الرتبة n:

✷ **خاصيات :**

لنكن f دالة موجبة على مجال I و x عنصر من I .

1) إذا كانت f متصلة على I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I .

2) إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \geq 0$ فإن $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$.

3) إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$.

الخاصيات تبقى صحيحة $+\infty ; -\infty ; x_0^+ ; x_0^-$

✷ **متطابقات :**

◆ $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, ◆ $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}$

✍ تمرين تطبيقي 7 :

نعتبر العددين A و B بحيث : $A=3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}$ و $B=-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}$

1) أحسب $A-B$ ثم $\sqrt[3]{A.B}$.

2) نعتبر العدد الحقيقي x بحيث : $x=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$

أ - أحسب x^3 بدلالة x (لاحظ أن $x=\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$)

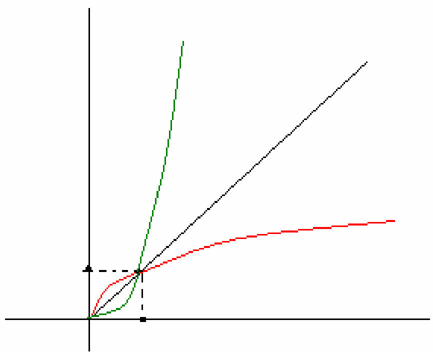
ب- آستنتج أن : $x=1$.

III.3.1) التمثيل المبياني لدالة الجدر من الرتبة :

◆ $f : IR^+ \to IR^+$ ، $x \to x^n$ ◆ $f^{-1} : IR^+ \to IR^+$ ، $x \to \sqrt[n]{x}$

x	0		$+\infty$
f(x)	0	↗	$+\infty$

x	0		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	↗	$+\infty$



◆ المنحنيان ζ_f و $\zeta_{f^{-1}}$ متماثلا ن بالنسبة للمنصف الأ ول للمعلم .

III .4) دالة قوس الظل :

خاصية و تعريف :

الدالة $\tan(x)$ تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ نحو IR . تقابلها العكسي يسمى دالة قوس الظل و يرمز لها بالرمز $\text{Artan}(x)$

✷ **نتائج :**

- $\tan(y)=x \Leftrightarrow \text{Artan}(x)=y \quad \left(\forall y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad (\forall x\in IR)$.
- $\tan(\text{Arctan}(x))=x \quad (\forall x\in IR)$ ◆ $\text{Arctan}(\tan(x))=x \quad \left(\forall y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
- $(\forall x_1\in IR)(\forall x_2\in IR)\ \begin{cases}\text{Arctan}(x_1)=\text{Arctan}(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2\\ \text{Arctan}(x_1)\langle \text{Arctan}(x_2) \Leftrightarrow x_1\langle x_2\end{cases}$
- الدالة قوس الظل متصلة على IR و لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\text{Arctan}(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\text{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$.

✍ تمرين تطبيقي8 :

أ حسب العبارات التالية :

- $\text{Arctan}(\tan(\frac{71\pi}{3}))$ ◆ $\text{Arct}(\tan(-\frac{41\pi}{4}))$ ◆ $\text{Tan}(\arctan(\frac{111\pi}{7}))$ ◆ $\text{Arctan}(\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{11})})$
- $\text{Arctan}(\frac{1}{2})+\text{Arct}(\frac{1}{5})+\text{Arctan}(\frac{1}{8})$

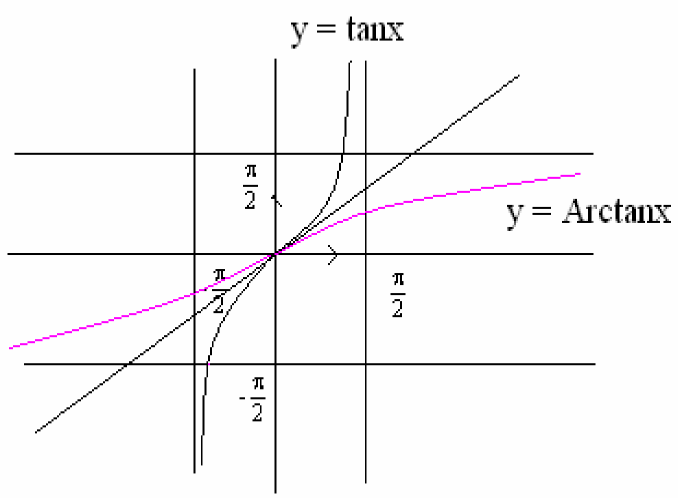
III .4.1) التمثيل المبياني لد ا لة قوس الظل :

- $f:\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to IR$, $x\to\tan(x)$ ◆ $f^{-1}:IR\to\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $x\to\text{Arctan}(x)$

x	$-\frac{\pi}{2}$ ↗ $\frac{\pi}{2}$
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

x	$-\infty$ ↗ $+\infty$
f^{-1}	$-\frac{\pi}{2}$ ↗ $\frac{\pi}{2}$

◆ المنحنيان ζ_f و $\zeta_{f^{-1}}$ متماثلا ن بالنسبة للمنصف الأ ول للمعلم .



<u>تمرين تطبيقي9 :</u>

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$

1) حدد D_f ثم نهايات f عند المحدات .

2) نعتبر g قصور الدالة f على المجال $I=]0,2]$.

أ - بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده .

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .