

التمرين الأول (نقطتان ونصف)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1}$ لكل n من \mathbb{N} .

(1) أ- بين أن $u_n > 0$ لكل n من \mathbb{N} .

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة.

(2) أ- بين أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$ لكل n من \mathbb{N} .

ب- استنتج أن: $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N} ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني (3 نقط ونصف)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

النقط $A(1, 2, -2)$ و $B(0, 3, -3)$ و $C(1, 1, -2)$ والمستوى (P) الذي معادلته: $x + y - 3 = 0$.

(1) أ- احسب مسافة النقطة $\Omega(0, 1, -1)$ عن المستوى (P) .

ب- استنتج أن معادلة ديكرتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0, 1, -1)$ والمماسة للمستوى (P)

$$\text{هي: } x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$$

(2) أ- حدد $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمة.

ب- بين أن: $x - z - 3 = 0$ معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) .

(3) أ- تحقق من الفلكة (S) مماسة للمستوى (ABC) .

ب- احسب المسافة ΩC واستنتج نقطة تماس (S) والمستوى (ABC) .

التمرين الثالث (3 نقط)

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة التالية: $2z^2 - 2iz - 1 = 0$ (E)

(1) أ- حل في \mathbb{C} المعادلة (E). (z_1 و z_2 هما حلا المعادلة بحيث $\text{Re}(z_1) > 0$).

ب- اكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

(2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

نعتبر النقط A و B و S التي ألقاها على التوالي هي: $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $s = i$.

أ- اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي: $\frac{a-s}{b-s}$.

ب- استنتج أن المثلث SAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في S .

ج- بين أن الرباعي $OASB$ مربع.

التمرين الرابع (3 نقط)

- يحتوي كيس U_1 على بيدقتين تحملان الرقم 1، وعلى أربع بيدقات تحمل الرقم 2 (لا يمكن التمييز بينها باللمس).
ويحتوي كيس U_2 على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس كذلك).
نسحب عشوائيا بيدقة واحدة من الكيس U_1 .
(1) أحسب احتمال الحدثن التاليان .
A: " البيدقة المسحوبة تحمل الرقم 1 ".
B: " البيدقة المسحوبة تحمل الرقم 2 ".
(2) نعتبر في هذا السؤال التجربة العشوائية التالية .
نسحب بيدقة واحدة من الكيس U_1 ونسجل رقمها:
- إذا كان هذا الرقم هو 1 نقوم بسحب كرة واحدة من الكيس U_2 .
- وإذا كان هذا الرقم هو 2 نقوم بسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_2 .
ليكن n عدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس U_2
و E_2 الحدث " الحصول بالضبط على n كرة حمراء "
أ- بين أن: $p(E_1) = \frac{11}{21}$ و $p(E_2) = \frac{2}{21}$.
ب- احسب احتمال الحدث A علما أن الحدث E_1 محقق.

0.5
0.5

1.5
0.5

مسألة (8 نقط)

- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$
و (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
(1) أ- تحقق من أن: $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ لكل x من \mathbb{R} .
ب- استنتج أن f معرفة على \mathbb{R} ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(2) بين أن: $f(2-x) = f(x)$ لكل x من \mathbb{R} ثم استنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تماثل المنحنى (C).
(3) أ- تحقق من أن: $f(x) = 2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right)$ لكل x من المجال $[1, +\infty[$.
ب- استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ثم أو هندسيا هذه النتيجة.
(4) أ- بين أن: $f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}$ لكل x من \mathbb{R} .
ب- أعط جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} .

0.25

0.75

0.5

0.5

0.5

0.5

0.5

5) أ- بين أن: $f''(x) = \frac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$ لكل x من \mathbb{R} . 0.5

ب- ادرس تقعر المنحنى (C). 0.5

6) أنشئ المنحنى (C). 0.75

7) ليكن h قصور الدالة f على المجال $[1, +\infty[$

أ- بين أن h تقابل من المجال $[1, +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده. 0.5

ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J . 0.5

8) أ- بوضع $t = x-1$ بين أن: $\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \ln(1+t^2) dt$ 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن: $\int_{-1}^0 \ln(1+t^2) dt = \ln 2 - 2 \int_{-1}^0 \frac{t^2}{1+t^2} dt$ 0.5

ج- بين أن: $\int_{-1}^0 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 1 - \frac{\pi}{4}$ (لاحظ أن: $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ لكل t من \mathbb{R}). 0.5

د- استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل 0.25

والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=0$ و $x=1$