

$$K = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-2}{4}} (x+1) \sin(2x+1) dx$$

$$L = \int \frac{1}{-x^2 + 2x + 5} dx \quad (t = \frac{x+1}{2})$$

التمرين رقم 3 :

نعتبر الدالة : $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{(x+1)(x-2)^2}$
أثبت أن لكل x من \mathbb{R} ($x \neq 2$; $x \neq -1$)

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

أحسب : $\int_0^1 f(x) dx$

التمرين رقم 4 :

(1) تحقق أن : $\forall t \in \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\}$:

$$\frac{t}{2t^2 + 3t - 2} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{t+2} + \frac{1}{2t-1} \right)$$

(2) أحسب التكامل التالي : $\int_1^4 \frac{t}{2t^2 + 3t - 2} dt$

(3) استنتج قيمة التكامل : $\int_0^5 \frac{1}{2x + \sqrt{3x+1}} dx$
باستعمال مكاملة بتغيير المتغير ($t = \sqrt{3x+1}$)

التمرين رقم 5 :

(1) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $u=2x$

أحسب التكامل : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2 + 1} dx$

(2) أحسب التكامل : $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(4x^2 + 1)^2} dx$

(3) استنتج قيمة التكامل : $K = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2 + x + 1}{(4x^2 + 1)^2} dx$

التمرين رقم 6 :

(1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون لكل x من : $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$

$$\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

(2) حدد دالة أصلية , على المجال $], +\infty[$, للدالة f

المعرفة على $], +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2}$

(3) أحسب : $I = \int \frac{x \ln x}{2(x^2 - 1)^2} dx$ (م بالأجزاء)

التمرين رقم 1 :

أحسب التكاملات التالية :

1) $\int_0^2 (1 - |x-1|)^3 dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x (\sin x + \sin^3 x) dx$

3) $\int_{-1}^1 (x - 2x^3) dx$; 4) $\int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$

5) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx$; 6) $\int_1^2 \frac{x+1}{x} dx$

7) $\int_1^2 (x^3 - \frac{1}{x^2} + 2) dx$; 8) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$

9) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$ ($t = \sqrt{2x+1}$)

10) $\int_0^{\sqrt{3}} t \sqrt{1+t^2} dt$ 11) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} dt$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$: $[\sin^3(x) = \sin x (1 - \cos^2(x))]$

13) $\int_{-1}^1 (x+1)^2 dx$ 14) $\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$

15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) dx$ 16) $\int_1^e x^5 \ln x dx$

17) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$; ($x = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin^3(x) dx$ 19) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos(3x) dx$

20) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$; ($u = x^2$) 21) $\int_0^1 (x^2 + x) dx$

22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$; 23) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx$; ($t = x+1$)

25) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x + \frac{\pi}{6}) dx$; 26) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x+1) \cos(3x) dx$

التمرين رقم 2 :

أحسب التكاملات I و J و K و L حيث :

$$I = \int_1^2 \frac{x^4 - 3x^3 + 2}{x^2} dx$$

$$J = \int_{-2}^0 (x+1) \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$$

التمرين رقم 7 :

أحسب التكاملات التالية :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x \, dx \quad (2), \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx \quad (1)$$

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x \, dx \quad (4), \quad K = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2} \, dx \quad (3)$$

$$H = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \quad (5) \quad \left(t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad x = \sin t : \text{ضع} \right)$$

$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2} \, dx \quad (6) \quad \left(t = \sqrt{x+1} \text{ وضع يمكنك} \right)$$

$$k = \int_0^1 \frac{\text{Arctan} x}{1+x^2} \, dx \quad (8), \quad J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx \quad (7)$$

$$H = \int_0^1 \text{Arc tan } x \, dx \quad (9) \quad \left(\text{المكاملة بالأجزاء} \right)$$

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arc sin } t \, dt \quad (11), \quad I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5} \, dx \quad (10)$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^3 x \, dx \quad (13), \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\tan^3 x} \quad (12)$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \sin 2x \, dx, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx \quad (14)$$

التمرين رقم 8 :

$$\left(\forall y \in \mathbb{R}_+^* \right) : \frac{y^3}{y+1} = (y+1)^2 - 3(y+1) - 3 - \frac{1}{y+1} \quad (1)$$

$$I = \int_1^2 \frac{y^3}{y+1} \, dy \quad \text{ب- استنتج حساب التكامل}$$

$$\left(y = \sqrt[6]{x} \right) J = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad \text{أحسب التكامل} \quad (2)$$

التمرين رقم 9 :

$$\text{نعتبر الدالتين } u(x) = \sqrt{1+x^2} \text{ و } v(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(1) \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}, \text{ أحسب : } u'(x) \text{ و } v'(x)$$

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \, dx \quad \text{ضع : } \alpha \text{ من } \mathbb{R} \quad (2)$$

باستعمال التكامل بالأجزاء أحسب : $I(\alpha)$

$$J = \int_1^e \frac{(\ln t)^3}{t(1+\ln t)^2 \sqrt{1+(\ln t)^2}} \, dt \quad \text{أحسب التكامل} \quad (3)$$

التمرين رقم 10 :

$$\text{نعتبر الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \sin^4(x)$$

$$(1) \text{ عبر عن } \sin^2(x) \text{ و } \cos^2(x) \text{ بدلالة } \cos(2x)$$

$$(2) \text{ عبر عن } \sin^4(x) \text{ بدلالة } \cos(2x) \text{ و } \cos(4x)$$

$$(3) \text{ أحسب : } \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) \, dx$$

التمرين رقم 11 :

1- أ بين أ

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \right) : x^2 + x + 1 = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \quad \text{ن}$$

$$\text{ب- بين أن : } I = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+x+1} \, dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$\left(\text{ضع : } t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$(2) \text{ أ- نضع لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^* : A = \frac{1}{x(x^2+x+1)}$$

$$\text{بين أن : } A = \frac{1}{x} - \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)}$$

$$\text{ب- أحسب التكامل : } J = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+x+1)} \, dx$$

$$(3) \text{ أحسب : } K = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{(2x+1)\ln(x)}{(x^2+x+1)^2} \, dx \quad \left(\text{م بالأجزاء} \right)$$

التمرين رقم 12 :

لكل عدد صحيح طبيعي n نعتبر التكاملين :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x) \, dx \quad \text{و} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x) \, dx$$

$$(1) \text{ أحسب : } I_0 \text{ و } J_0$$

$$(2) \text{ أ بين أن } \begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}^* \quad \left(\text{م بالأجزاء} \right)$$

ب- استنتج J_n و I_n بدلالة n .

$$(3) \text{ أحسب النهايتين : } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$$

التمرين رقم 13 :

$$\text{لكل عدد ص.ط. } n \text{ نعتبر : } I_n = \int_0^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin(x) \, dx$$

$$(1) \text{ بين أن : } I_n = (-1)^n \cdot \frac{e^{-n\pi} + 1}{2} \quad \left(\text{م بالأجزاء} \right)$$

$$(2) \text{ بين أن } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ هندسية محددًا أساسها و حدها الأول}$$

التمرين رقم 14 :

$$\text{نعتبر } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بـ : } u_n = \int_1^2 e^{-nt^2} \, dt$$

$$(1) \text{ بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in [1,2] : 0 \leq e^{-nt^2} \leq e^{-nt}$$

$$(2) \text{ استنتج أن : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq \frac{e^{-n} - e^{-2n}}{n}$$

$$(3) \text{ استنتج نهاية المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

التمرين رقم 15:

نعتبر المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt, I_1 = \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt, \dots$$

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt, \dots$$

(1) أحسب I_0 , ثم أحسب I_1 باستعمال المكاملة بالأجزاء .
(2) قارن t^n و t^{n+1} بحيث $0 \leq t \leq 1$ ثم إستنتج رتبة المتتالية I_n .

(3) باستعمال تأطير مناسب للعدد $\sqrt{1+t}$ بين أن :

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

(4)- بين أن لكل t من المجال $[0;1]$:

$$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$$

ثم إستنتج أن : $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

ب- حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين رقم 19:

لكل e . ص.ط. n نعتبر : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$

$$(1) \text{ أحسب : } I_0 = \int_1^e x^2 dx$$

(2) باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب : I_1

(3) بين أن : $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(4) استنتج : I_2

(5) بين أن : $I_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(6) استنتج من (3) أن : $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(7) أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين رقم 20:

نعتبر $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث : $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

$$(1) \text{ أحسب : } u_0 \text{ و } u_1 = \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

(2) بين أن : $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(3) أدرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

التمرين رقم 21:

نعتبر n عدد ص. نسبي و x حقيقي بحيث $x \geq 1$ و $n \neq -1$

$$(1) \text{ أ- أحسب : } I_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t) dt \text{ (م. بالأجزاء)}$$

$$\text{ب- إستنتج : } J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$$

(2) أ- أحسب : $I_n(e) - J_n(e)$

ب- أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$

التمرين رقم 22:

نعتبر التكاملين :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \text{ و } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

(1) أحسب $I+J$ و $I-J$.

(2) استنتج قيمة كل من I و J .

التمرين رقم 17:

نعتبر : $I_n = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} (t^2 - 1)^n dt$ و $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx$

(1) أحسب I_0 و I_1 . ثم عبر عن I_{n+2} بدلالة I_n .

(2) أحسب J_0 و J_1 . ثم عبر عن J_{n+2} بدلالة J_n .

التمرين رقم 18:

لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $J_n = \int_1^e \ln(x)^n dx$

(1) أ- بين أن $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$ $\forall x \in]1; e[$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- إستنتج رتبة المتتالية (J_n) .

ت- بين أن : $J_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ثم إستنتج أن المتتالية (J_n) متقاربة .

(2) أ- أحسب : J_1 .

ب- بين أن : $J_n = e - (n+1)J_{n+1}$ $\forall n \neq 0$ م. بالأجزاء

التمرين رقم 23:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} ; n \in \mathbb{N} \text{ و } x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\\ f_n(0) = 2n+2 \end{array} \right. \text{ نعتبر:}$$

$$\text{نضع: } u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$$

$$(1-A) \text{ بين أن } f_n \text{ متصلة على } \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

استنتج أن المتتالية (u_n) معرفة على \mathbb{N} .

$$(2) \text{ بين أن: } u_{n+1} - u_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

$$(3) \text{ أحسب } u_0 \text{ و } u_1 \text{ و } u_2$$

$$(1-B) \text{ بين أن } u_n = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$(2) \text{ أحسب } \int_0^1 dx \text{ و } \int_0^1 x^{2k} dx \text{ من أجل } k \text{ في } \mathbb{N}^*$$

$$\text{استنتج أن: } u_n = 2 \int_0^1 \frac{1 - (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

$$(3) \text{ بين أن } \left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{2}{2n+3}$$

$$\text{استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين رقم 24:

$$\text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع } I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$(1) \text{ احسب } I_1$$

$$(2) \text{ بين أن: } \forall n \in \mathbb{N}^*: I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!}$$

$$(3) \text{ استنتج أن: } \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n n!} + I_n$$

$$\text{بين أنه يوجد } A \text{ في } \mathbb{R} \text{ بحيث: } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A$$

$$\text{و استنتج: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{n!} \right)$$

التمرين رقم 25:

$$(1) \text{ احسب مشتقة } f: \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(2) \text{ } n \in \mathbb{N} \text{ } J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \text{ و } I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{أحسب } I_0 \text{ و } I_1$$

$$(3) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ و } (I_n)_{n \geq 0} \text{ متقاربة و حدد نهايتها.}$$

$$(4) \text{ حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$$

$$(5) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N}: I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$$

$$\text{استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} (nI_n)$$

التمرين رقم 26:

$$(1) \text{ لتكن } Q_{n-2} (n > 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \text{ (متغير } t) \text{ الدالة المعرفة ب: } Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2}$$

$$\text{بين أن: } \forall t \in \mathbb{R} - \{-1\}: Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1} t^{n-1}}{1+t}$$

$$\text{أستنتج أن } \forall t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t}$$

$$\text{و أن: } \forall x \in [0,1]: \ln(1+x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$$

$$\text{حيث: } P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$(2) \text{ أ } \varphi \text{ دالة معرفة ب: } \forall x \in]0,1]: \varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

بين أن φ تقبل تمديدا بالإتصال في 0^+ الدالة f بحيث:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]0,1]: f(x) = \varphi(x) \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{ب) بين أنه: } x - \ln(1+x) < 0 \text{ و } \forall x > 0: f(x) \leq 1$$

$$\text{و استنتج أن: } \forall x > 0: f(x) \leq 1$$

$$\text{ج) نضع: } L = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{بين أنه: } \forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{و حدد: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = L \text{ ثم بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n}$$

$$(3) \text{ أ) بين أن } \forall x \in [0,1]: \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{n-1} dt$$

$$\text{و أستنتج أن } \forall x \in [0,1]: \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{و أن: } -\frac{1}{nx} \leq f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leq \frac{1}{nx}$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n(1) \\ S_n(1) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \end{array} \right. \text{ بين أن:}$$

$$\forall n \geq 2 \text{ } S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$$

$$\text{ب) بين أن: } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]: \frac{x^p}{p^2} \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$$

$$\text{لاحظ أن } S_4(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2}\right) + \frac{x^3}{3^3}, S_3(x) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right), S_2(x) = x$$

$$x - S_5(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) + \frac{x^4}{4^2}, x - S_4(x) = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}, x - S_3(x) = \frac{x^2}{2^2}$$

$$\text{حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right) \text{ (بين أن } \uparrow \text{)}$$

$$\text{ج) استنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = \int_0^1 f(x) dx$$

التمرين رقم 27:

(1)(A) نعتبر المتتاليين (u_n) و (v_n) بحيث:

$$\begin{cases} u_1 \\ u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}; n \neq 0 \\ v_1 = 1 \\ v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^n}, n \neq 0 \end{cases}$$

(a) حدد a و b في \mathbb{R} : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{(n-1)^n} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n}$

استنتج v_n بدلالة n .

(b) بين أن (u_n) تزايدية و أن $u_n \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(B) (1) لكل t من $[0, \pi]$ ولكل n من \mathbb{N}^* نضع

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin(kt) \quad \text{و} \quad C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$

احسب $C_n(t) + iS_n(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{استنتج أن:} \\ \forall t \in]0, \pi]: C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} \\ C_n(0) = n \end{array} \right.$$

(b) هل الدالة C_n متصلة على $[0, \pi]$ ؟

$$(2) \text{ تحقق من أن: } \forall t \in]0, \pi]: 1 + 2C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}}$$

و بين أن الدالة من $[0, \pi]$ نحو \mathbb{R} : $f(t) = 1 + 2C_n(t)$ تقبل تمديدا g_n بالإتصال على $[0, \pi]$.

$$(3) \text{ بين أن: } \forall n \in \mathbb{N}^*: \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$$

$$\text{و استنتج أن: } u_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) C_n(t) \, dt$$

$$(4) \text{ احسب } \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) dt$$

$$\text{وبين أن: } \forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{\pi^2}{6} - u_n = \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) g_n(t) \, dt$$

$$(C) \text{ نعتبر الدالة: } \begin{cases} f(t) = \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin \frac{t}{2}}, 0 < t \leq \pi \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

(1) بين أن f متصلة على $[0, \pi]$ و أنه يوجد M في \mathbb{R} .

بحيث: $\forall t \in [0, \pi]: 0 \leq f(t) \leq M$

(2) ليكن α عنصرا من $]0, \pi[$.

$$(a) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \left| \int_0^{\alpha} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| \leq \alpha M$$

(b) بين أن f ق. للإش على $[\alpha, \pi]$ و f' متصلة على $[\alpha, \pi]$

و أنه يوجد M' في \mathbb{R} بحيث:

$$\forall t \in [\alpha, \pi], |f'(t)| \leq M'$$

$$(c) \text{ نضع } I_n = \int_{\alpha}^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \text{ في } \mathbb{N}$$

بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (استعمال بالتكامل بالأجزاء)

$$(3) \text{ استنتج مما سبق أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} - u_n \right) = 0$$

التمرين رقم 28:

$$F(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t - e^t}{t^2} dt \text{ معرفة على } \mathbb{R}^{*+} \text{ ب:}$$

(1) بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}): F(x) = \left[\frac{e^t - 1}{t} \right]_{2x}^{3x} - \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t} dt$$

(2) بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}): e^{2x} \int_{2x}^{3x} \frac{dt}{t} \leq \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{3x} \int_{2x}^{3x} \frac{dt}{t}$$

(3) استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ $\left(\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ x > 0 \end{array} \right)$

التمرين رقم 29:

نعتبر التكامل $I = \int_0^1 f(t) dt$ حيث $f(t) = \sqrt{t}$

و الأعداد $x_i = \frac{i}{n}$ حيث $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

بين أن: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{n} f(x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f(x_i)$$

و استنتج تأطيرا للعدد I .

$$\text{حدد: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

التمرين رقم 30:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + |t| + 1}} dt \text{ نعتبر الدالة:}$$

$$\text{و نضع: } f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + |t| + 1}}$$

(1) بين أن F معرفة على \mathbb{R} و أنها فردية.

$$(2) \text{ بين أن: } \forall t \geq 0: \frac{1}{t+1} \leq f(t) \leq t$$

و استنتج أن: $\forall x \geq 0: F(x) \leq x$

و أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

$$(3) \text{ بين أن } f(t) \leq \frac{1}{t} \text{ و استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$$

(4) ادرس تغيرات F و أنشئ منحنائها.

