$2^{ème}$ SM	**Suites numériques**	***H . Bouayoun***

Exercice 1

soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \arccos(\frac{1}{u_n}) \end{cases}$

1.montrer que $(\forall n \in IN) : u_n > 1$ *2.étudier le sens de variation de (u_n)*

3. montrer que $(\forall n \in IN) : u_n > n\frac{\pi}{3} + 2$ *. en déduire que la suite (u_n) n'est pas majorée.*

Exercice 2

soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{\alpha}{2^k})$

1.montrer que la suite (u_n) *est décroissante et minorée et déduire qu'elle est convergente .*

2.montrer que $(\forall n \geq 1) : u_n = \dfrac{\sin(\alpha)}{2^n \sin(\frac{\alpha}{2^n})}$ *et en déduire la limite de la suite* (u_n) *.*

Exercice 3

soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n + u_n}{n^2} \end{cases}$

1.montrer que $(\forall n \geq 1) : u_n \leq 2$ *. en déduire que* (u_n) *est convergente et calculer sa limite l .*

2.montrer que $(\forall n \geq 2) : \dfrac{1}{n-1} \leq u_n \leq \dfrac{n+1}{(n-1)^2}$ *. En déduire* $\lim(nu_n)$

3.on veut étudier la monotonie de la suite (u_n) *.*

a) montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ *définie par* $v_n = \dfrac{n}{n^2 - 1}$ *est décroissante .*

b) montrer que pour tout $n \geq 2$ *, on a* $u_n \geq v_n$ *.*

c) en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ *est décroissante .*

Exercice 4

soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+2)u_n + 2(n^2 + n - 1)}{(n+1)^2} \end{cases}$

1.montrer que la suite (u_n) *est décroissante .*

2.montrer que (u_n) *est convergente et calculer sa limite l .*

3.calculer $u_{n+1} - l$ *en fonction de* $u_n - l$ *. en déduire* u_n *en fonction de n .*

Exercice 5

soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2\sqrt[3]{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$

1.montrer que $(\forall n \in IN) : u_n > 1$ *2.étudier le sens de variation de (u_n)*

3.montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite

Exercice 6

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *, pour tout* $n \in IN$ *on pose* $u_n = 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})$ *et* $u_n = 2^n \tan(\frac{\theta}{2^n})$

Montrer que les suites (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes et déterminer leur limite commune .*

Exercice 7

Soient a *et* b *deux nombres réels tels que* $0 < a < b$ *.on considère les deus suites* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et*

$(b_n)_{n\geq 0}$ *définies par :* $\begin{cases} a_0 = a \ , \ b_0 = b \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \ \text{ et } \ b_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)} \end{cases}$

1. *Montrer que les suites* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *sont convergentes et ont la même limite.*
2. *montrer que pour tout* $n \geq 0$: $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8a}(b_n - a_n)^2$
3. *En déduire que pour tout* $n \geq 0$: $0 \leq b_n - a_n \leq 8a(\frac{b-a}{8a})^{2^n}$

Exercice 8

soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1.*montrer que* $(\forall n \geq 0) : u_n \geq 1$

2. *Etudier les variations de la suite* (u_n) .

3. *montrer que* $(\forall n \geq 1) :\ 2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$ *et* $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$.

4. *En déduire la divergence de la suite* (u_n) .

en déduire que (u_n) *est convergente et calculer sa limite* l .

5.*montrer que* $(\forall n \geq 0) : 1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$ *. En déduire* $\lim(\frac{1}{\sqrt{2n}} u_n)$

Exercice 9

Soit $n \in IN^*$ *. on considère la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $f_n(x) = 3x^n - x - 1$

1. *montrer que* f_n *est croissante sur* $\left[\sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}}, +\infty\right[$ *et décroissante sur* $\left[0, \sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}}\right]$ *. puis poser le tableau de variation de* f_n .

2. *montrer que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* u_n *dans l'intervalle* $[0, +\infty[$.

3. *calculer* $f_n(1)$ *, en déduire que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$.

4. a) *montrer que :* $(\forall x \in]0,1[) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$

   b) *montrer que* (u_n) *est croissante , en déduire qu'elle est convergente .*

5. *on pose* $\lim u_n = l$

   a) *montrer que :* $0 \leq l \leq 1$

   b) *montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :\ u_n \leq l$ *(penser au raisonnement par absurde)*

   c) *montrer que :* $l = 1$. *(penser au raisonnement par absurde encore)*

Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

Et on pose $v_n = n u_n$

1. a) *montrer que* $(\forall n \in IN) :\ 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

   b) *montrer que la suite* (v_n) *est croissante .*

2. montrer que la suite (v_n) converge vers un réel λ tel que $0<\lambda\leq 1$

3. montrer que la suite $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ converge vers une limite l à déterminer .

4. a) montrer que si $\lambda \neq 1$ alors :

$$(\exists n_0 \in IN^*)\ (\exists a>0)\ :\ n>n_0 \Rightarrow v_{n+1}-v_n > \frac{a}{n}$$

b) En déduire que $(\forall n > n_0)\ :\ v_{2n} - v_n > \frac{a}{2}$.

c) montrer que $\lim v_n = +\infty$.

5. déterminer $\lim v_n$.

Exercice 11

Soit $a \in [0,1]$, et soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a^2 - u_n^2) \end{cases}$

1. Soient $x_n = a - u_n$ et $y_n = a + u_n$. Trouver des relations liant x_{n+1} et y_{n+1} à x_n et y_n

2.Montrer que $(\forall n \in IN) : x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$. En déduire la monotonie de la suite (u_n) .

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 12

Pour tout $n \in IN^*$ on définie la fonction f_n sur IR par : $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$.

1. Simplifier l'expression $(1-x)^2 f_n(x)$. En déduire une autre expression de $f_n(x)$ pour $x \neq 1$.

2. Pour tout $x \in [0,1]$, On pose $F(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

a) Donner l'expression de $F(x)$.

b) Représenter sur un même graphique ,dans l'intervalle $[0,1]$, les fonctions f_1, f_2, f_3 et F .

3. Montrer que , pour tout $n \in IN^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution , notée u_n , dans l'intervalle $[0,1]$. Puis calculer u_1 et u_2 .

4. Etudier le sens de variation de le suite (u_n) . En déduire qu'elle converge . On notera l sa limite .

5. Montrer que $(\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right])(\forall n \in IN^*)\ :\ |F(x) - f_n(x)| \leq 6\frac{n+1}{2^{n+1}}$.

6. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n(u_n) = F(l)$. En déduire la valeur de l .

Exercice 13

Pour tout $n \in IN$ on définie la fonction f_n sur IR par : $f_n(x) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution dans $[0,1]$,notée u_n .

2. Montrer que $(\forall n \in IN)\ :\ f_n(u_{n+1}) < 0$. En déduire le sens de variation de (u_n) .

3. Calculer la limite de (u_n) .

4. Soit $a_n = u_n - \frac{1}{2}$. Montrer que $\lim (n+1)a_n = 0$. En déduire $\lim 2^{n+2}(u_n - \frac{1}{2})$