$2^{ème}$ SM	**Arithmétique**	H.Bouayoun

Exercice1

1. Montrer que $(\forall(a,b)\in \mathbb{Z}^2): a\wedge b=1 \Rightarrow a\wedge b(a+b)=1$
2. Soient $x,y\in IN^*$ tels que $x(43-x)=y(x+y)$. on pose $x\wedge y=d$, $x=dx'$, $y=dy'$
   a) Montrer que x'/d .
   b) On pose $\alpha=\dfrac{d}{x'}$. Montrer que $\alpha(x'^2+x'y'+y'^2)=43$ et en déduire que $\alpha=1$
3. Résoudre dans IN^{*2} l'équation $x(43-x)=y(x+y)$.

Exercice 2

Soient $k\in IN^*$; $A=9(k+3)$; $B=4k$; $d=A\wedge B$

1. Montrer que $d/108$.
2. Déterminer les valeurs de k pour les quelles on a : a) 2 ne divise pas d
   b) 3 ne divise pas d
3. Soit $k=2+6m$.
   a) Montrer que d=1 b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $Ax-By=108$

Exercice 3

On pose $A_n=6n^3-n^2+2n+2$; $B_n=2n-1$; $C_n=2n^2+n-5$. n étant un entier relatif tel que les nombres A_n , B_n , C_n soient non nuls .

1. a) Montrer que : $A_n\wedge B_n=(n+1)\wedge 7$. b) déterminer suivant les valeurs de n $A_n\wedge B_n$
2. a) Montrer que : $C_n\wedge B_n=B_n\wedge 6$. b) déterminer suivant les valeurs de n $C_n\wedge B_n$

Exercice 4

1. Soient $a,b\in IN$. Montrer que: $a\wedge b=1 \Rightarrow (a+2b)\wedge(3a+5b)=1$
2. Résoudre dans IN^2 le système $\begin{cases}(a+2b)(3a+5b)=127b\\ ab=2(a\vee b)\end{cases}$

Exercice 5

Soient $a,b,c,d\in IN^*$

1. Montrer que $a\wedge(b\vee a)=a$ et $a\vee(b\wedge a)=a$.
2. Montrer que si $a\wedge b=1$ alors $a\wedge(bc)=a\wedge c$ et $a\vee(bc)=b(a\vee c)$.
3. Montrer que $(a^2+b^2)\wedge(ab)=(a\wedge b)^2$
4. Montrer que $a\wedge b=(a+b)\wedge(a\vee b)$

Exercice 6

Soient $a,b,m,n\in IN$

1. Montrer que $(a\equiv b\,[n]$ et $d/n) \Rightarrow a\equiv b\,[d]$
2. Montrer que $(a\equiv b\,[n]$ et $a\equiv b\,[m]) \Leftrightarrow a\equiv b\,[m\vee n]$
3. En déduire que si $a\equiv a^5\,[5]$ alors a et a^5 ont la même unité dans leur écriture en base 10 .

Exercice 7

Soit $n>5$ un entier .

1. On suppose qu'il existe un entier naturel m tel que $(n-1)!+1=n^m$
   a) Montrer que n est un impaire . b) Montrer que $(n-1)^2\,/\,(n-1)!$
   c) Montrer que $(n-1)\,/\,m$ d) En déduire que $n^m>(n-1)!+1$
2. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers naturels tel que : $(n-1)!+1=n^m$

Exercice 8

Soit $n \in IN^* - \{1\}$ *. On pose* $M_n = 2^n - 1$

1. Montrer que si M_n *est premier alors* n *est aussi premier .*

2. Soient p , $q \in IN^* - \{1\}$ *tels que :* $p \wedge q = 1$

a) Montrer que : $(\exists (x, y) \in IN^2) : px - qy = 1$

b) Montrer que : $(2^{px} - 1) - 2(2^{py} - 1) = 1$

c) En déduire que : $M_p \wedge M_q = 1$

Exercice 9

On considère dans IN^2 *l'équation* $x^2 + 3 = 2^y$ *. Soit* (x, y) *une solution de cette équation .*

1. Montrer que x est impaire . *2. Montrer que* $x^2 \equiv 1[8]$ *.*

3. En déduire les solutions de cette équation .

Exercice 10

On considère dans IN^3 *l'équation* $(1) :\ x^2 + 2y^2 = z^2$

1. a) Montrer que : $(\forall m\ , n \in IN)\ :\ m^2 / n^2 \Rightarrow m / n$ *.*

b) Montrer qu'il suffit d'étudier le cas ou $x \wedge y = 1$ *.*

Dans la suite on suppose que $x \wedge y = 1$ *dans l'équation (1) .*

2. a) Montrer que si (x, y, z) *est solution de l'équation (1) alors x et z sont impaires et y paire .*

b) On pose $d = (z - x) \wedge (z + x)$ *. Montrer que d est paire et en déduire que* $d = 2$ *.*

c) Montrer que si $a^2 = bc$ *et* $c \wedge b = 1$ *alors il existe b' et c' tels que* $b = b'^2$ *et* $c = c'^2$ *.*

3. Soit α et $\beta \in IN$ *tels que* $3 - x = 2\alpha$ *et* $3 - x = 2\alpha$ *.*

Montrer que α ou β *est paire , en déduire les solutions de l'équation (1) .*

Exercice 11

Pour tout $n \in IN^*$ *on pose* $x_n = 2^n - 1$ **.**

I. 1. a) Montrer que $(\forall n \in IN^*)\ :\ x_{n+1} = 2x_n + 1$

b) En déduire que : $(\forall n \in IN^*)\ :\ x_{n+1} \wedge x_n = 1$

2. a) Montrer que : $n \equiv 0[6] \Leftrightarrow x_n \equiv 0[9]$ *(Remarquer que :* $2^6 \equiv 1[9]$ *)*

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres $n \in IN^*$ *tels que* $n \wedge x_n \neq 1$ *.*

3. a) Montrer que $(\forall (n, m) \in IN^{*2})\ :\ n / m \Rightarrow x_n / x_m$

b) Soient $m\ , n \in IN^*$ *. Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de m sur n alors* x_r *est le reste de la division euclidienne de* x_m *sur* x_n *. (Remarquer que :* $2^n \equiv 1[x_n]$ *) .*

c) En déduire que $x_m \wedge x_n = x_n \wedge x_r$ *.*

d) Montrer en utilisant l'algorithme d'Euclide que : $(\forall (m, n) \in IN^{*2})\ :\ x_m \wedge x_n = x_{m \wedge n}$

II. Dans la suite en veut monter que $(\forall k \in IN^*)(\exists i \in \{1,2,3,.....,2k\}) : 2k + 1 / x_i$

On suppose le contraire c . à . d $(\exists k \in IN^*)(\forall i \in \{1,2,3,.....,2k\}) : x_i \neq 0[2k+1]$

Et soit R_i *le reste de la division euclidienne de* x_i *par* $2k + 1$ *.*

1. Montrer que : $(\forall i \in \{1,2,3,.....,2k\}) : 1 \leq R_i \leq 2k$ *.*

2. a) Montrer que : $x_i \equiv 2k[2k+1] \Leftrightarrow 2^i \equiv 0[2k+1]$

b) En déduire que : $(\forall i \in \{1,2,3,.....,2k\}) : R_i \neq 2k$ *.*

3. Montrer que les restes R_i *sont distincts deux à deux .*

4. Conclure .

Exercice12

1. Soit $a, b, d \in IN^*$ *. Montrer que* $d = a \wedge b \Rightarrow (\exists (u, v) \in IN)\ :\ d = au - bv$

1. Soient $m, n, p \in IN^*$ *tels que* $2^m \equiv 1[p]$ *et* $2^n \equiv 1[p]$ *. Montrer que* $2^{m \wedge n} \equiv 1[p]$ *.*

Exercice13

1. *Soient* $a,b,c \in \mathbb{Z}$ *tel que :* $a \wedge b = 1$. *trouver un nombre* x *tel que :* $(a+bx) \wedge c = 1$
2. *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* $(a \wedge b)+(a \vee b) = b+9$
3. *On suppose ici que a divise b . Montrer que* $b \wedge c = (a \wedge c)\left[\dfrac{c}{a \wedge c} \wedge \dfrac{b}{a}\right]$

   et $(a \vee c)\dfrac{b}{a} = (b \vee c)\left[\dfrac{c}{a \wedge c} \wedge \dfrac{b}{a}\right]$

Exercice 14

Dans le système de numération de base a, on donne l'écriture des naturels x, y et z :

$x = \overline{111}$, $y = \overline{114}$ *et* $z = \overline{13054}$.

1) Écrivez dans ce même système de numération les naturels x + y et x + z.

2) Déterminez a sachant que z est le produit de x et y.

Exercice 15

On veut déterminer les chiffres x, y et z pour lesquels $\overline{xyz}_{12} = \overline{xyz0}_5$.

1) Quelles inégalités larges à propos des entiers x, y et z pouvez-vous écrire d'emblée ?

2) Montrez que l'égalité à obtenir équivaut à $19x - 13y = 4z$.

3) Grâce à l'algorithme d'Euclide, déterminez des naturels X et Y tels que $19X - 13Y = 1$.

4) Prouvez que si des entiers x, y et z vérifient $19x - 13y = 4z$*, il existe un entier k tel que :* $x = -8z + 13k$ *et* $y = -12z + 19k$.

5) Montrez que dans les égalités du 4), on ne peut pas avoir $k \leq 0$.

6) Quelle est la plus grande valeur possible pour $x + 8z$ *? En déduire qu'on a nécessairement* $k \leq 2$.

7) Montrez que dans la division euclidienne de 19 k par 12, y doit être le reste et z, le quotient.

8) Concluez.