ج م ع	الحدوديات - النظمات المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية	ح.بوعيون

I) الحدوديات

1) تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}$ نعتبر التعبير

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$$

حيث $a_n,....,a_1,a_0$ أعداد حقيقية و $a_n\neq 0$

*) $P(x)$ أو P تسمى حدودية من الدرجة n ونكتب $\deg P=n$.

*) الأعداد $a_n,....,a_1,a_0$ تسمى معاملات الحدودية P .

b) تكون حدودية منعدمة إذا وفقط إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة.

c) الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

d) تكون حدوديتان متساويتان إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

e) كل حدودية من الدرجة 1: $P(x)=ax+b$ تسمى حدانية.

f) كل حدودية من الدرجة 2: $P(x)=ax^2+bx+c$ تسمى ثلاثية الحدود.

2)

a) $\deg(P+Q)\leq\sup(\deg P,\deg Q)$

b) $\deg(P-Q)\leq\sup(\deg P,\deg Q)$

c) $\deg(P\cdot Q)=\deg P+\deg Q$

3) القسمة على $\boxed{x-\alpha}$

a) لتكن $P(x)$ حدودية. نقول إن العدد α جذر للحدودية P أو صفر للحدودية P إذا وفقط إذا كان $P(\alpha)=0$

b) لتكن $P(x)$ حدودية.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وفقط إذا كان $P(\alpha)=0$.

ملاحظة:

a) إذا أردنا أن نتحقق هل $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ نقوم بحساب $P(\alpha)$.

*) إذا كان $P(\alpha)=0$ فإن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$.

*) إذا كان $P(\alpha)\neq 0$ فإن $P(x)$ لا تقبل القسمة على $x-\alpha$.

b) إذا أردنا أن نتحقق هل $P(x)$ تقبل القسمة على $x+\alpha$ نقوم بحساب $P(-\alpha)$.

II) المعادلات والمتراجحات من الدرجة II.

1) حل المعادلة $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

نعتبر المعادلة $(E):ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة (E) نقوم بحساب العدد $\Delta=b^2-4ac$

*) العدد Δ يسمى مميزا لمعادلة (E).

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $x=\frac{-b}{2a}$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) لا تقبل أي حل.

ملاحظة:

a) نعتبر المعادلة $(E):ax^2+2b'x+c=0$ (يعني $b=2b'$)

نستعمل المميز المختصر Δ' عوض المميز Δ . ولدينا $\Delta'=b'^2-ac$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما.

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\qquad x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $x=\frac{-b'}{a}$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'\langle 0}$ فإن المعادلة (E) لا تقبل أي حل.

b) إذا كان $\Delta=\alpha^2$ فإن المعادلة تقبل حلين

$$x_1=\frac{-b-\alpha}{2a}\qquad x_2=\frac{-b+\alpha}{2a}$$

2) تعميل ثلاثية الحدود

نعتبر ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ مع $a\neq 0$

من أجل تعميل $P(x)$ نقوم بحل المعادلة (E) $ax^2+bx+c=0$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة E تقبل حلين x_1 و x_2 ويكون تعميل $P(x)$ هو $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا x_0 ويكون تعميل $P(x)$ هو $P(x)=a(x-x_0)^2$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) ليس لها حل والحدودية $P(x)$ ليس لها تعميل.

ملاحظة:

إذا كان $\Delta=0$ فإن الحدودية $P(x)$ عبارة عن متطابقة هامة.

3) إشارة ثلاثية الحدود.

نعتبر الحدودة $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

من أجل دراسة إشارة $P(x)$ نقوم بحل المعادلة $(E):ax^2+bx+c=0$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

وتكون إشارة $P(x)$ هي

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا x_0 وتكون إشارة $P(x)$ هي:

x		x_0	
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة a

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) ليس لها حل وتكون إشارة $P(x)$ هي:

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	

4) مجموع وجداء جدري معادلة من الدرجة II.

a) نعتبر المعادلة $(E): ax^2+bx+c=0$

*) إذا أردنا أن نبين أن المعادلة (E) تقبل حلين نقوم بحساب Δ ونجد $\Delta \geq 0$.

*) يمكن حساب مجموع وجداء هاذين الحلين بدون حل المعادلة باستعمال الصيغ التالية

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

b) إذا أردنا تحديد معادلة من الدرجة II يكون α و β حلين لها.

نقوم بحساب $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ نجد $\alpha+\beta=S$ و $\alpha \cdot \beta=P$

وتكون هذه المعادلة هي $x^2-Sx+P=0$

c) إذا أردنا حل النظمة $\begin{cases} x+y=S \\ x \cdot y=P \end{cases}$ نقوم بحل المعادلة $t^2-St+P=0$

إذا كان x_1 و x_2 هما الحلين فإن $\begin{cases} x \equiv x_1 \\ y=x_2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=x_2 \\ y=x_1 \end{cases}$

$$S=\{(x_1,x_2),(x_2,x_1)\}$$

ملاحظة:

1) ليكن α و β حلي المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

نعلم أن $\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

إذا أردنا حساب حد يحتوي على α و β

نحاول إظهار $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$.

أمثلة: *) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

*) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$

$=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha\beta\right]$

$=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right]$

*) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$.

2) ليكن x_1 و x_2 حلي معادلة من الدرجة الثانية. من أجل دراسة إشارة x_1 و x_2 نقوم بحساب x_1+x_2 و $x_1 \cdot x_2$.

*) إذا كان $\boxed{x_1x_2\langle 0}$ فإن أحد العدد x_1 و x_2 موجب والآخر سالب.

*) إذا كان $\boxed{x_1x_2\rangle 0}$ فإن x_1 و x_2 لهما نفس الإشارة وهي إشارة x_1+x_2 .

III) النظمـــات الخطية

1) المعادلات من الدرجة I بمجهولين:

نعتبر المعادلة $ax+by+c=0$ (1) حيث أحد العددين a أو b غير منعدم. من أجل حل المعادلة (1) نحسب x بدلالة y إذا كان $a \neq 0$ أو نحسب y بدلالة x إذا كان $b \neq 0$. مثلا إذا كان $a \neq 0$

نجد $x=\dfrac{-by-c}{a}$ إذن $S=\left\{\left(\dfrac{-by-c}{a},y\right)/\, y \in \mathbb{R}\right\}$

2) نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

نعتبر النظمة $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث الأعداد a و b و a' و b' ليست كلها منعدمة.

من أجل حل النظمة (S) نقوم بحساب المحددات التالية.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$$

a) إذا كان $\boxed{\Delta \neq 0}$: فإن النظمة تقبل حلا وحيدا.

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad S=\{(x,y)\}$$

b) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$:

*) إذا كان $\boxed{\Delta_x \neq 0}$ أو $\boxed{\Delta_y \neq 0}$ فإن النظمة (S) ليس لها حل $s=\varnothing$

*) إذا كان $\boxed{\Delta_x=0 \ \text{و}\ \Delta_y=0}$ فإن النظمة (S) تكافئ إحدى المعادلتين.

3) إشـــــارة $\boxed{ax+by+c}$

من أجل دراسة إشارة $ax+by+c$ نقوم بإنشاء المستقيم $(D): ax+by+c=0$

المستقيم (D) يقسم المستوى (P) إلى نصفي مستوى (P_1) و (P_2) .

إذا عوضنا x و y بإحداثيات أي نقطة من (P_1) فإننا نحصل على إشارة ثابتة.

وإذا عوضنا x و y بإحداثيات أي نقطة من (P_2) فإننا نحصل على إشارة عكس الإشارة السابقة. ولمعرفة هذه الإشارة نعوض x و y بإحداثيات نقطة من (P_1) أو (P_2) نأخذ عادة إحداثيات θ هي $x=0$ و $y=0$.